

УДК 622.023.2

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

Н.С. Адигамов, Я.И. Рудаев, М.А. Мамадалиева
КРСУ, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Рассматривается задача моделирования деформационного поведения геоматериалов при сжатии с учётом запредельной ветви. Уравнение состояния дополнено соотношением, устанавливающим связь между начальными несовершенствами и повреждаемостью. При этом процесс деформации, сопровождаемый необратимыми структурными флуктуациями, отождествляется с формированием иерархии диссипативных сред.

Ключевые слова: деформация, разрушение, напряжение, горные породы, неустойчивость, параметры несовершенства и повреждаемости.

ТОО ТЕКТЕРИНИН МАЙЫШУУ ЖҮРҮМ-ТУРУМУН МОДЕЛДӨӨ ЖӨНҮНДӨ

Адигамов Н.С., Рудаев Я.И., Мамадалиева М.А.
КРСУ, Кыргыз Республикасы, Бишкек шаары

Кысылуудагы геоматериалдардын майышуу жүрүм-турумун моделдөө маселеси чектен чыккан абалды эсепке алуу менен каралган. Абалдын теңдемеси, баштапкы жаракалар менен бузулуулардын байланышын аныктоо менен толукталды. Мындай учурдагы кайта келгис структуралык өзгөрүштөр менен коштолгон майышуунун жүрүшү иерархиялык диссипативдик чөйрөнүн пайда болушу менен дал келтирилди.

Өзөктүк сөздөр: майышуу, кыйроо, чыңалуу, тоо тектери, туруктуу эместик, жаракалуулуктун жана бузулуулардын көрсөткүчтөрү.

ON MODELING OF DEFORMATION BEHAVIOR OF ROCKS

N.S. Adigamov, Ya.I. Rudaev, M.A. Mamadalieva
KRSU, Bishkek, Kyrgyz Republic

We consider the problem of modeling of the mountain rocks deformation behavior under the conditions of geomaterials compression taking into account the evanescent (post-critical) branch. State equation is complemented by ratio that establishes a connection between the initial imperfections and damage rate. In this case, the deformation is identified with the formation of dissipative medium hierarchy, accompanied by irreversible structural fluctuations.

Key words: deformation, fracture, stress, rocks, instability, parameters of imperfections, damage

Введение

Развитие представлений о прочности твердых тел опирается на изучение особенностей деформирования вплоть до разрушения. Они, в свою очередь, требуют сведений об основных механических свойствах материала и характеристик процесса нагружения [1, 2]. Анализ экспериментальных и теоретических данных позволяет связать необратимые деформационные процессы с наблюдаемыми нелинейными эффектами [3, 4]. Так, на смену существующим взглядам на необратимость, как на квазиравновесный процесс, приходят представления о неравновесных состояниях. При этом деформационный процесс можно рассматривать как систему структурно-фазовых переходов [3, 4, 5].

Следуя [6-8], считаем, что моделирование реальной физико-механической системы динамического типа начинается с введения координат состояния $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$, называемых параметрами порядка. К ним прибавляется дополнительное множество параметров $T_1, T_2, \dots, T_k$, имитирующих отклик на изменение параметров η_k и представляющих собой внешние воздействия. Кроме этого, предполагается наличие параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, ответственных за дефекты исходного состояния системы и появившиеся в процессе её нагружения.

Горные породы изначально относятся к неоднородным материалам и в стационарном состоянии, устойчивом относительно малых возмущений, могут быть интерпретированы как диссипативные структуры [9]. В соответствии с известной [10, 11] классификацией пространственно-временных структур, горные породы на больших глубинах могут считаться автоструктурами – локализованными пространственными образованиями, устойчиво существующими в диссипативных неравновесных средах и не зависящими от изменения начальных и граничных условий. Именно поэтому процесс деформации и разрушения горных пород может рассматриваться как иерархия неустойчивостей, обусловленных самоорганизацией, реализуемой в системе, находящейся вдали от термодинамического равновесия. Приведённые рассуждения свидетельствуют о полезности привлечения

синергетических представлений [12] к описанию равновесия и устойчивости горных пород.

В качестве исходной информации принимаются паспортные зависимости [1, 2] максимального касательного напряжения T и относительного изменения объёма θ от максимального сдвига Γ , построенные на основании известных опытов на одноосное сжатие [13]. На рис. 1 дано схематическое представление паспортных зависимостей $T=T(\Gamma)$ (кривая 1), $\theta=\theta(\Gamma)$ (кривая 2).

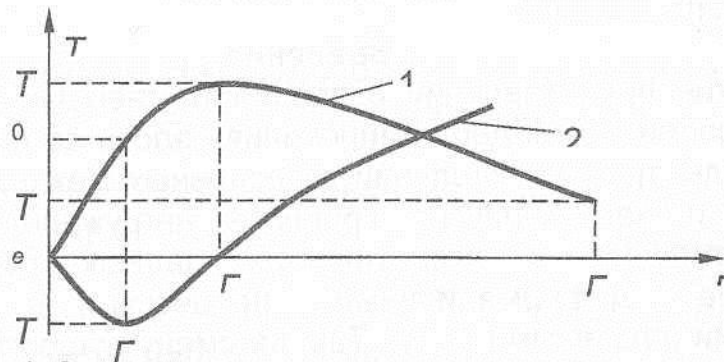


Рис. 1. Схематическое представление паспортных зависимостей $T=T(\Gamma)$ и $\theta=\theta(\Gamma)$

Упругий участок диаграммы деформаций $T=T(\Gamma)$ ($T \leq T_e$; $\Gamma \leq \Gamma_e$) сменяется областью упрочнения, переходящей при $T \geq T_0$, $\Gamma \geq \Gamma_0$ в зону разупрочнения. После достижения критического сдвига Γ_c наступает разрушение. Опытными данными [13-15] установлено, что вблизи предела прочности ($T=T_0$) изменение объёма близко к нулю (материал несжимаем). Здесь же происходит смена знака объёмной деформации. Последнее означает активизацию составляющей деформации разрыхления.

Для описания закономерностей деформирования горных пород введём нормировку координат [1]

$$F = \frac{T}{T_e} - 1; \quad \eta = \frac{\Gamma}{\Gamma_c}; \quad \vartheta = \frac{\theta}{\theta_e}, \quad (1)$$

где θ_e — объёмная деформация, соответствующем пределу упругости.

На основании зависимостей (1) схематизированные паспортные диаграммы представлены в форме $F=F(\eta)$, $\vartheta=\vartheta(\eta)$ (рис. 2).

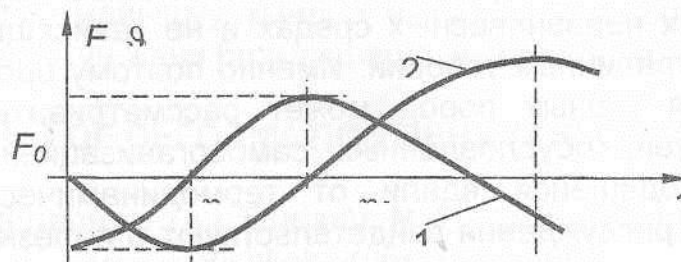


Рис. 2. График закономерностей деформирования горных пород

Уравнение состояния

Пусть текущему напряжённно-деформированному состоянию отвечает потенциальная функция [1] вида

$$V = V(F, \eta, \beta), \quad (2)$$

где β – параметр, ответственный за дефекты не только исходного состояния, но и появившиеся в условиях нагружения.

В процессе деформирования горные породы испытывают ряд состояний, смена которых имеет место в критических точках. Так, при $\eta = \eta_e$ (рис. 2) наступает пластичность и формируется новая диссипативная структура, которая при $\eta = \eta_0$ (запредельной области) сменяется ещё одной диссипативной структурой. По существу в деформируемом материале возникают синергетические эффекты [12].

Поскольку в процессе эксперимента на сжатие реализуется медленное внешнее воздействие, то указанные эффекты можно отнести к самоорганизации через управляющие параметры β .

Функцию (2) представим суперпозицией потенциала $V_p(F, \eta)$, ответственного за необратимые процессы и возмущения $S(\eta, \beta)$. Имеем

$$V = V(F, \eta, \beta) = V_p(F, \eta) + S(\eta, \beta). \quad (3)$$

Потенциальная составляющая функции записывается в виде разложения в ряд Тейлора вблизи состояния равновесия

$$V = V_0 + V_1(\eta - \eta_e) + \frac{1}{2}V_2(\eta - \eta_e)^2 + \frac{1}{3!}V_3(\eta - \eta_e)^3 + \dots \quad (4)$$

Функция V_p выбирается так, чтобы состоянию равновесия соответствовало $\eta = \eta_e$ и, следовательно, имело место равенство:

$$\frac{dV_p}{d\eta} = V_1 + V_2(\eta - \eta_e) + \frac{1}{2}V_3(\eta - \eta_e)^2 + \dots = 0. \quad (5)$$

Таким образом, приходим к условию $V_0 = V_1 = 0$. Если предположить, что изменения совершенной системы связаны с возрастающим нормированным напряжением $F \rightarrow F_0$, то моделирующая её потенциальная функция путём переноса начала координат может быть записана (рис. 2) в виде

$$V_p = \frac{1}{2}(F_0 - F)\eta^2 + \frac{1}{3}\eta^3 + \dots \quad (6)$$

Для возмущения примем морсовское разложение [8]

$$S(\eta, \beta) = \beta_0\eta + \frac{1}{2}\beta_2\eta^2 + \frac{1}{3}\beta_3\eta^3 + \dots \quad (7)$$

Зависимость (7) путём соответствующей нелинейной замены может принять каноническую форму катастрофы [8]. Но такое преобразование приведёт к сложной нелинейной связи между нормированным напряжением F и параметром β . Можно показать, что

чувствительность материала к несовершенствам вполне определяется первым слагаемым разложения (7) и позволяет исключить все возмущения, кроме линейного.

С учётом сказанного для функции $V(F, \eta, \beta)$ можем записать

$$V(F, \eta, \beta) = \beta\eta + \frac{1}{2}(F_0 - F)\eta^2 + \frac{1}{3}\eta^3, \quad (8)$$

где $F_0 = F|_{\eta=\eta_0}$ (рис. 2).

Равновесному состоянию отвечает уравнение

$$F = \frac{\beta}{\eta} + \eta + F_0, \quad (9)$$

где $\beta = \beta_1$ ($\beta < 0$), $\eta \in (0, 1)$.

Уравнение (9) с позиций теории катастроф можно рассматривать как двумерное многообразие, включённое в пространство $|R^3|$ с координатными осями η, F, β . Состояния равновесия будут найдены для каждого $\beta = const$. Свойства устойчивости критических точек при этом легко определяются: все точки левее $\eta = \eta_0$, где $\eta \in (0, \eta_0)$ – локально устойчивые критические точки, а $\eta \in (\eta_0, 1)$ – неустойчивые критические точки.

Таким образом, получено уравнение состояния (7), устанавливающее связь между нормированными максимальными касательными напряжениями F и сдвиговой деформацией η . В уравнение (7) входит управляющий параметр β , названный [8] параметром несовершенства.

Эволюционное уравнение

В [7] впервые введено представление о повреждаемости материала в процессе деформации и его характеристика – параметр повреждаемости. Указанная характеристика ω рассматривается как внутренний параметр состояния, эволюция которого определяется соответствующим кинетическим уравнением $\dot{\omega} = f(\omega)$, где $\dot{\omega} = d\omega/dt$, причем t – время. Удобным представляется связать параметры β и ω между собой, полагая параметр ω ответственным за текущее структурное состояние материала.

Для анализа физической природы повреждаемости обратимся к опытам, проведённым в Институте физики и механики горных пород НАН КР на различных геоматериалах [5]. При испытании на осевое сжатие осуществлялась регистрация акустической эмиссии образцов как результат трещинообразования. На рис. 3 дано схематическое представление характера процесса образования микротрещин.

Здесь по оси абсцисс отложена нормированная деформация η , а по оси ординат – отношение текущего количества трещин в образце (N)

к максимальному ($N_{\max}$), отвечающему моменту разрушения. Отождествляя параметр повреждаемости ω с $N/N_{\max}$ и анализируя его эволюцию, приходим к выводу, что процесс деформирования может рассматриваться как многостадийный размытый необратимый фазовый переход [16-18]. На графике $\omega \sim \eta$ наблюдаются характерные для размытого фазового перехода особенности. Понятно, что переходу материала в запредельную область сопутствует смена типа устойчивости, обусловленная сильными структурными флуктуациями. Поэтому появление на графике $\omega \sim \eta$ точки перегиба ($\eta = \eta_0$), соответствующей пределу прочности материала, вполне предсказуемо.

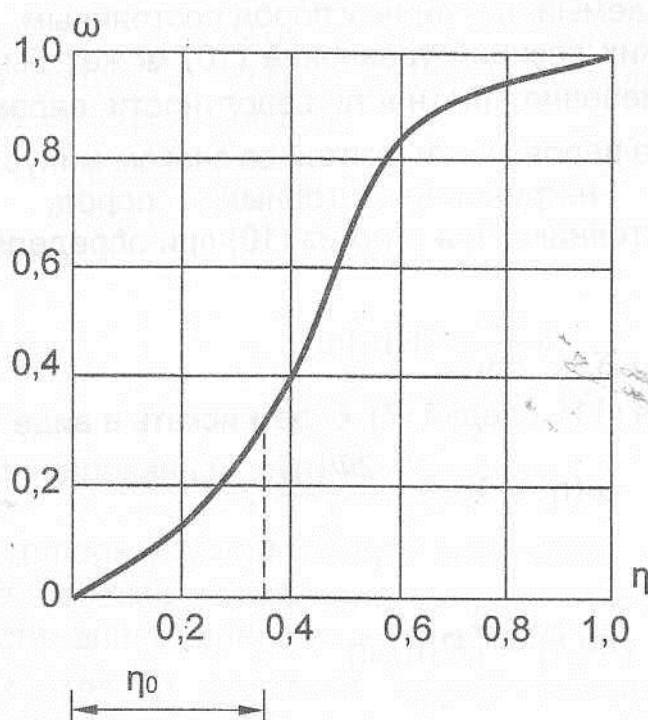


Рис. 3. Схематическое представление параметра повреждаемости от деформации

Отметим, что в области упругих деформаций параметр ω возрастает слабо. При переходе в пластическое состояние ω начинает интенсивно расти. Это объясняется природой остаточных деформаций начально неоднородных материалов, к которым, как указывалось выше, относятся горные породы. Здесь, помимо чисто сдвиговых процессов, существенный вклад в деформацию даёт разрыхление, сопровождающееся потерей связности, наличием поверхностей отрыва [19].

Кроме того, на участке упрочнения следует ожидать появления локализованных областей, в которых частицы материала измельчаются. Тем самым в образовавшейся структуре зарождаются ростки новой,

более сложной структуры, переход к которой совершается при смене типа устойчивости. В новом состоянии, при котором напряжение уменьшается с ростом деформаций, отмечается быстрое возрастание повреждаемости, а при появлении магистральной трещины $\omega \rightarrow 1$.

В рамках неравновесной статистической механики для описания повреждаемости горных пород может быть привлечён вариант уравнения Фоккера-Планка [1] в виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[R(\eta) \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] = 0. \quad (10)$$

Здесь $R = R(\eta)$ – функция, ответственная за внутреннее скольжение и разрыхление в материале (коэффициент «дрейфа»), λ – коэффициент диффузии, принимаемый для горных пород постоянным.

С механических позиций уравнение (10) может быть рассмотрено как равенство изменения плотности вероятности параметра $\omega = \omega(\eta)$ дивергенции потока вероятности, взятой со знаком минус.

Статическое нагружение горных пород, соответствует стационарному состоянию. При этом из (10) при определённых условиях [12] имеем

$$\lambda \frac{d\omega}{d\eta} = 2R(\eta)\omega. \quad (11)$$

Решение уравнения (11), следуя (7), будем искать в виде

$$\omega(\eta) = A \exp \left(-\frac{2\Phi(\eta)}{\lambda} \right), \quad (12)$$

где интеграл

$$\Phi(\lambda) = -\int_0^{\eta} R(\eta) d\eta \quad (13)$$

имеет смысл потенциала, а нормировочный множитель A определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) d\eta = 1. \quad (14)$$

Введение потенциала $\Phi(\eta)$ обуславливается привлечением методов теории катастроф к моделированию деформационных процессов горных пород с включением запредельной ветви. В таком случае очевидна ассоциация процесса с градиентной динамической системой [7]. Учитывая сильную нелинейность зависимости $\omega = \omega(\eta)$ (рис. 3), потенциальную функцию $\Phi(\eta)$ и антиградиент $R(\eta)$ этой функции можно представить в виде элементарной катастрофы сборки. Имеем

$$\Phi(\eta) = \frac{a\eta^2}{2} + \frac{b\eta^4}{4}; \quad (15)$$

$$R(\eta) = -a\eta - b\eta^3, \quad (16)$$

где a, b – постоянные, подлежащие определению.

Теперь понятно, что функция параметра повреждаемости на основании (12), (13), (15) определяется выражением

$$\omega = A \exp \left[\frac{1}{\lambda} \left(-a\eta^2 - \frac{1}{2}b\eta^4 \right) \right]. \quad (17)$$

Временная эволюция параметра повреждаемости будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d \ln \omega}{dt} = -\frac{2}{\lambda} (a\eta + b\eta^3) \frac{d\eta}{dt}. \quad (18)$$

Подставив результат (17) в условие нормировки и вычислив соответствующий интеграл, получим

$$A \left(\frac{m}{2} \right)^{1/2} \sqrt{\exp \lambda} K_{\frac{1}{4}}(\lambda) = 1, \quad (19)$$

где $m = \frac{a}{b}$;

$$\lambda = \frac{a^2}{4\lambda b} = \frac{m^2 b}{4\lambda}, \quad (20)$$

а $K_{\frac{1}{4}}(\lambda)$ – модифицированная функция Ганкеля.

Перейдём теперь к установлению параметров A, a, b, λ . Для этого принимаем, что переход геоматериалов в диссипативное состояние обусловлен достижением предела упругости $T = T_e$ (рис. 1), а смена диссипативных состояний (фазовая трансформация) происходит на пределе прочности $T = T_0$. Далее считаем, что именно последнему утверждению отвечает точка перегиба на зависимости $\omega = \omega(\eta)$ (рис. 3).

Полагая, с учётом сказанного,

$$\frac{d^2 \omega}{d\eta^2} \Big|_{\eta=\eta_0} = 0, \quad (21)$$

будем иметь

$$\frac{2b}{\lambda} (m\eta_0 + \eta_0^3)^2 - m_0 - 3\eta_0^2 = 0. \quad (22)$$

Воспользуемся очевидным фактом, в соответствие которому

$$\omega \Big|_{\eta=1} = 1, \quad (23)$$

можно записать

$$\ln \frac{1}{A} = -\frac{2b}{\lambda} (2m^2 + 1). \quad (24)$$

Таким образом, установлено, что три параметра геосреды $A, m, b / \lambda$ связаны между собой уравнениями (19), (22), (24).

Остановимся теперь на определении зависимости между параметрами повреждаемости и несовершенства.

Пусть при некотором значении параметра повреждаемости $\omega = \omega_e$ параметр несовершенства получает значение $\beta = \beta_e$, причём ω_e, β_e соответствуют пределу упругости горной породы. Допустим, что при изменении ω на малое значение $d\omega$ параметр β откликается уменьшением на величину, пропорциональную β . Поэтому можно положить

$$d\beta = -\beta K(\omega - \omega_e) d\omega, \quad (25)$$

где $K(\omega - \omega_e)$ – ядро, убывающее с ростом $\omega - \omega_e$.

Решение дифференциального уравнения (25) представим в форме

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_e) Q(\omega, \omega_e), \quad (26)$$

причём

$$Q(\omega, \omega_e) = \exp \left[- \int_{\omega_e}^{\omega} K(\omega - \omega_e) d\omega \right]. \quad (27)$$

Ядро оператора (25) примем в виде

$$K(\omega - \omega_e) = \frac{1-n}{(\omega - \omega_e)^n}, \quad (28)$$

где n – безразмерная постоянная величина.

Подставив (28) в (27), после вычисления интеграла можем записать

$$Q(\omega, \omega_e) = \exp \left[-(\omega - \omega_e)^{1-n} \right]. \quad (29)$$

Теперь решение (26) уравнения (25) принимает вид

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_e) \exp \left[-(\omega - \omega_e)^{1-n} \right], \quad (30)$$

причём

$$\beta(\omega_e) = -\beta_e (F_0 + \eta_e). \quad (31)$$

Таким образом, сформулирована модель, включающая уравнение состояния (9), дополненное эволюционным уравнением для параметра ω (18) и условием (30), устанавливающим связь между параметрами несовершенства и повреждаемости с определением четырёх материальных констант $m, b / 2\lambda, A, n$. Указанная модель пригодна для описания деформационного поведения геоматериалов вплоть до разрушения.

Не останавливаясь подробно на численной процедуре решения системы уравнений (19), (22), (24), (30), отметим лишь, что полученные значения материальных постоянных для некоторых горных пород [13] приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры констант, полученные при решении системы уравнений

Горная порода	m	$b/2\lambda$	A	n
Песчаник НВО	0,098	225,3	1,046	-2,64
Песчаник ВО	0,131	99,792	5,525	-2,81
Коелганский мрамор	0,139	96,349	1,132	-3,089
Биотитовый гранит	0,113	159,36	1,082	-2,17

Сопоставление теоретических и опытных данных

Результаты экспериментальных и теоретических исследований показаны на графиках (рис. 4). Здесь точками показаны экспериментальные значения параметра несовершенства β в зависимости от деформации η , полученные путем сопоставления диаграмм «напряжение-деформация» [13] и найденные из уравнения состояния (9). Сплошные линии соответствуют теоретическим значениям β , установленным по формуле (30).

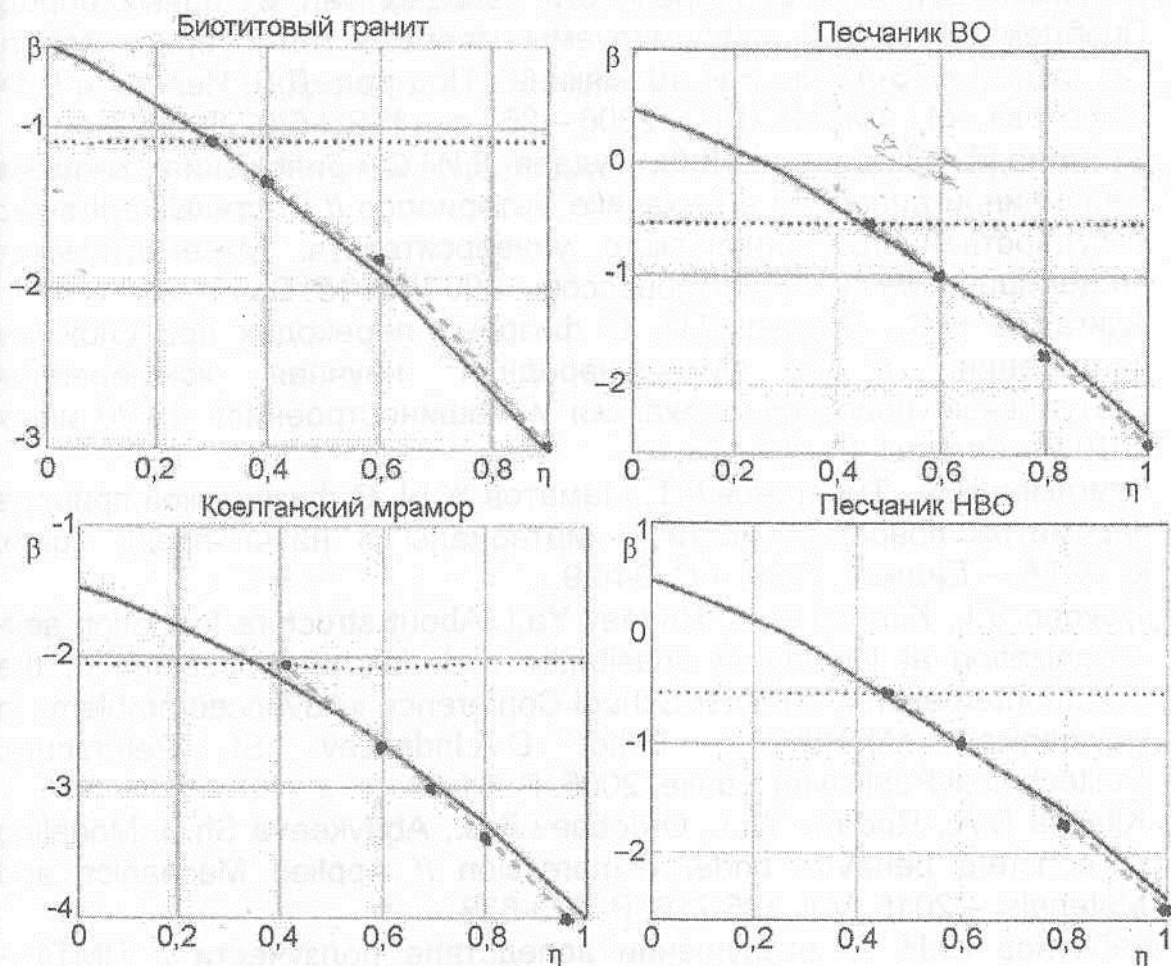


Рис. 4. Результаты экспериментальных и теоретических исследований

Заключение

Предложенную модель, включающую уравнение состояния (9), эволюционное уравнение для параметра повреждаемости (17) и выражение для параметра несовершенства (30), можно считать, с учётом обобщения на пространственный случай, приемлемой для постановки и решения задач анализа напряжённо-деформированного состояния в окрестностях горных выработок и при бурении скважин. Перспективность применения методов синергетики к задачам построения физически обоснованных нелинейных определяющих соотношений вполне оправдано. Это относится к описанию сред, для деформационного поведения которых характерна иерархическая необратимая смена диссипативных структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адигамов Н. С., Рудаев Я. И. Уравнение состояния, учитывающее разупрочнение материала // ФТПРПИ. – 1999. №4. С. 24-32.
2. Шемякин Е.И. Вопросы прочности твердых тел и горных пород. Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сб. статей к 73-летию Е.И. Шемякина / Под ред. Д.Д. Ивлева и Н.Ф. Морозова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 864 с. – ISBN 5-9221-0672-4.
3. Китаева Д.А., Пазылов Ш.Т., Рудаев Я.И. О приложениях методов нелинейной динамики в механике материалов // Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов. – 2007. № 15. С. 46-70.
4. Адигамов Н.С., Рудаев Я.И. О фазовых переходах при сложном нагружении. // IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы механики и машиностроения» 19-20 июня 2014 г. – Алматы. С. 184-188.
5. Адигамов Н.С., Тилегенов К.Т., Маматов Ж.Ы. О физической природе параметра повреждаемости // Материалы 3 научн.-практ. конф. КГУСТА. – Бишкек, 1999. – С. 94-99.
6. Dovgan V.I., Kitaeva D.A., Rudaev Ya.I. About structure formation self-organization at loading of quasibrittle materials // Proceeding of the XXXIII International Summer School-Conference «Advanced problems in mechanics» (APM'2005). Editor D.A.Indeitsev. St. Petersburg: Politechnical Publishing House, 2005. P. 61-66.
7. Kitaeva D.A., Rudaev Ya.I., Ordobaev B.S., Abdykeeva Sh.S. Modeling of concrete behavior under compression // Applied Mechanics and Materials. – 2015. Vol. 725-726. P. 623-628.
8. Работнов Ю.Н. О разрушении вследствие ползучести // ПМТФ. – 1963. №2. С. 113-123.
9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. – М.: Мир, 1984. – 350 с.

10. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости, флуктуаций.– М.: Мир, 1973.– 208 с.
11. Нелинейные волны, структуры и бифуркации / Ред. А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович.– М.: Наука, 1983.– 263 с.
12. Пригожин И.Р. Неравновесная статистическая механика.– Череповец: Меркурий – Пресс, 2000.– 314 с.
13. Хакен Г. Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам.– М.: УРСС: ЛЕНАНД, 2014.– 320 с.
14. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах.– М.: Недра, 1985.– 271 с.
15. Рудаев Я.И., Китаева Д.А., Мамадалиева М.А. Моделирование деформационного поведения горных пород // Записки Горного института. – 2016. Т. 222. С. 816-822.
16. Ставрогин А.Н., Тарасов Б.Г., Певзнер Е.Д. Запредельные характеристики хрупких горных пород //ФТПРПИ. – 1981. – №4. – С. 8-15.
17. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород.– М.: Недра, 1979.– 301 с.
18. Ролов Б.Н., Юркевич В.Э. Физика размытых фазовых переходов.– Ростов: РГУ, 1983.– 320 с.
19. Леонов М.Я. Механика деформации и разрушения.– Фрунзе: Илим, 1981.– 236 с.